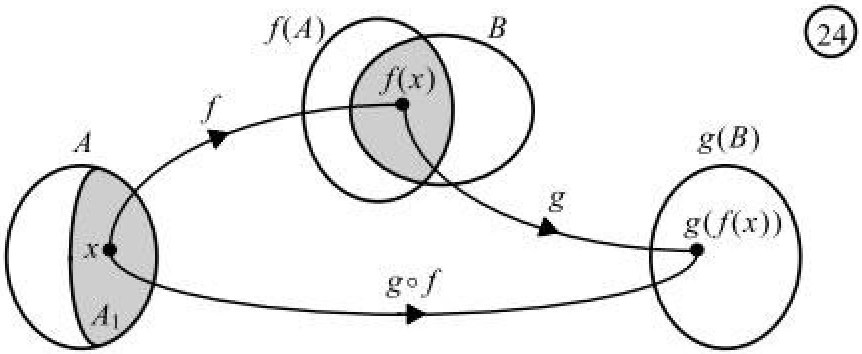
# ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

➢ Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού $D_f$ και $D_g$ αντίστοιχα. Τότε ορίζω τη συνάρτηση (g∘f)$(x)$= g$(f(x))$ και διαβάζω "σύνθεση της f με τη g"

→Το πεδίο ορισμού της g∘f είναι το $D_{g\circ f}$= {x ∈ $D_f$: f$(x)$ ∈ $D_g$}

<u>Εξήγηση</u>: Κοιτάω μέσα στις παρενθέσεις: Η f έχει το x μέσα στην παρένθεσή της άρα x ∈ $D_f$ και η g έχει το f$(x)$ μέσα στην παρένθεσή της άρα f$(x)$ ∈ $D_g$




<u>Παρατήρηση</u>: Αν $D_g$= $\Re$ τότε $D_{g\circ f}$=$D_f$

·Προφανώς η g∘f ορίζεται μόνο αν $D_{g\circ f} \neq \varnothing$, όπως όλες οι άλλες συναρτήσεις

→$D_{g\circ f} \neq \varnothing \Leftrightarrow$ f ($D_f$) ∩ $D_g \neq \varnothing$

<u>SOS</u>: Αν ορίζονται οι g∘f και f∘g δεν είναι κατ' ανάγκη g∘f= f∘g

·π.χ. Η f$(x)$= x+1 και g$(x)$= $x^2$ είναι (g∘f)$(x)$= g$(f(x))$= $f^2$ $(x)$= $(x+1)^2$
ενώ (f∘g)$(x)$= f$(g(x))$= g$(x)$+1 =$x^2$+1 $\neq (x+1)^2$

Αν f, g, h τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$ τότε θα ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και μάλιστα $h\circ(g\circ f)= (h\circ g)\circ f$, τότε θα γράφουμε $h\circ g\circ f$ και θα διαβάζουμε “η σύνθεση των f, g και h”.

<u>Απόδειξη</u> (εκτός ύλης): Αρκεί να αποδείξουμε την ισότητα των $h\circ(g\circ f)$ και $(h\circ g)\circ f$ και αποδεικνύουμε όλη την πρόταση έτσι.

→$D_{h\circ(g\circ f)}$= {x∈$D_{g\circ f}$: $(g\circ f)(x)\in D_h$}= {x∈$D_f$: f(x)∈$D_g$ και g(f$(x)$) ∈ $D_h$}

→$D_{(h\circ g)\circ f}$= {x∈$D_f$: f(x)∈$D_{h\circ g}$}= {x∈$D_f$: f(x)∈$D_g$ και g(f$(x)$) ∈ $D_h$}

Άρα $D_{h\circ(g\circ f)}$= $D_{(h\circ g)\circ f}$= A

·Επιπλέον, ∀ x∈A, είναι $h\circ(g\circ f)(x)= h(g\circ f)(x)=h(g(f(x)))= (h\circ g)(f(x))=(h\circ g)\circ f$

Τελικά όντως ισχύει $h\circ(g\circ f)= (h\circ g)\circ f$.

Δηλαδή τελικά η σύνθεση είναι προσεταιριστική πράξη αλλά όχι αντιμεταθετική.

Αξίζει να σημειωθεί πως η σύνθεση συναρτήσεων αποτελεί <u>ΠΡΑΞΗ</u> όπως η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός.

## <u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

**1)** Έστω οι συναρτήσεις f(x)= $\sqrt{x-1}$ και g(x)= ln(x-1).

Να ορίσετε τις: i) $g\circ f$, ii) $f\circ g$

<u>Λύση</u>: Για το $D_f$: Πρέπει και αρκεί x-1≥ 0 ⇔ x≥ 1

Άρα $D_f$=[1, ∞)

Για το $D_g$: Πρέπει και αρκεί x-1> 0 ⇔ x>1

Άρα $D_g$=(1, ∞)

i) $D_{g\circ f}$= {x∈$D_f$ f(x)∈$D_g$}= {x≥1: $\sqrt{x-1}$ > 1> 0} = {x≥1: x-1 >1}= {x≥1: x>2} = (2, ∞)

με (g∘f)$(x)$= g(f$(x)$)= ln(f$(x)$-1)= ln($\sqrt{x-1}$ -1)

ii)$D_{f\circ g}$= {x∈$D_g$ :g(x)∈$D_f$}= {x>1: ln(x-1)≥ 1= lne}=
={x>1: x-1≥  0}= {x>1: x≥1+e}= [1+e, ∞)
με (f∘g)$(x)$= f(g$(x)$)= $\sqrt{g(x)-1}$= $\sqrt{ln(x-1)-1}$= $\sqrt{ln(x-1)-lne}$= $\sqrt{ln\frac{x-1}{e}}$.

**2)** Δίνονται f(x)= $\frac{3x-2}{x-3}$, g(x)= $\frac{1}{1-x}$, h(x)= $\frac{1}{x}$

Να δείξετε ότι:  i) (h∘g∘h∘g)$(x)$= x, ∀ x≠ 0,1
και  ii) (f∘f)$(x)$=x, ∀x ≠ 3
<u>Λύση</u> :

i) Αφού η σύνθεση ως πράξη είναι προσεταιριστική τότε  h∘g∘h∘g= (h∘g)∘(h∘g), άρα πρέπει να ορίσω την h∘g.

Για το $D_g$: Πρέπει και αρκεί 1-x≠0 ⇔ x≠1, άρα $D_g$=ℜ\{1}

και για το $D_h$: Πρέπει και αρκεί x≠0, άρα $D_h$=ℜ\{0}= $\Re^*$

και $D_{h\circ g}$={x∈$D_g$: g(x)∈ $D_h$}= {x≠1: $\frac{1-x}{1}$≠0}= ℜ\{1}

Με (h∘g)$(x)$= h(g$(x)$)= $\frac{1}{g(x)}$ = $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1-x}}$ = $\frac{1-x}{1}$= 1-x

τότε $D_{(h\circ g)\circ(h\circ g)}$= $D_{h\circ g\circ h\circ g}$= {x∈$D_{h\circ g}$:(h∘g)$(x)$∈$D_{h\circ g}$}=
= {x≠1: 1-x≠ 1}= {x≠2: x≠0}= ℜ\ {0,1}
με h∘g∘h∘g= (h∘g)∘(h∘g)= (h∘g)($(h\circ g(x))$)= 1-(h∘g)$(x)$= 1-(1-x)=
= 1-1+x= x, ∀ x ≠ 0,1

ii) Για το $D_f$: Πρέπει και αρκεί x-3≠0 ⇔ x≠3, άρα $D_f$= ℜ\ {3}

τότε $D_{f\circ f}$= {x∈ $D_f$: f(x) ∈ $D_f$}= {x≠3: $\frac{3x-2}{x-3}$≠ 3} (1)

Λύνω την εξίσωση: $\frac{3x-2}{x-3}$= 3 ⇔ 3x-2=3x-9⇔

⇔ 2=9, άτοπο άρα $\frac{3x-2}{x-3}$≠ 3, ∀ x∈ℜ\ {3}

άρα $D_{f\circ f}$= {x≠3: x∈ℜ\ {3} }= ℜ\ {3} με f∘f$(x)$= f(f$(x)$)= $\frac{3f(x)-3}{f(x)-3}$= $\frac{3\frac{3x-2}{x-3}-2}{\frac{3x-2}{x-3}-3}$= $\frac{\frac{9x-6}{x-3}-\frac{2x-6}{x-3}}{\frac{3x-2}{x-3}-\frac{3x-9}{x-3}}$= $\frac{\frac{9x-2x-6+6}{x-3}}{\frac{3x-2-3x+9}{x-3}}$= $\frac{7x}{7}$= x, ∀ x∈ $\Re$\ {3}

**3)** Να εκφράσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, όταν:

i) f(x)= $\eta\mu^2 x$ , ii) g(x)= $\sqrt{lnxx + 1}$, iii) h(x)= 2εφ$^2$x -εφx+3

iv) k(x)= $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

<u>Λύση:</u> i) f(x)= $\eta\mu^2 x$: f(x)= φ∘λ$(x)$ όπου φ(x)= $x^2$ και λ(x)= ημx

ii) g(x)= $\sqrt{lnx + 1}$, g(x)= (π∘z)$(x)$, όπου π(x)= $\sqrt{x + 1}$ και z(x)= lnx

iii) h(x)= (a∘b)$(x)$, όπου a(x)= 2$x^2$-x+3 και b(x)= εφx

iv) k(x)= (c∘d)$(x)$, όπου c(x)= $\frac{1}{x}$ και d(x)= συνx.

# <u>ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ</u>

**4)** Δίνονται συναρτήσεις: g: $\Re$→ $\Re$ με g(x)= 2x-3 και

(f∘g): $\Re$→ $\Re$ με (f∘g)$(x)$= $x^2$-3x+2.

➢Να βρείτε τον τύπο της f: $\Re$→ $\Re$.

<u>Λύση</u>: Για να βρω την εξωτερική συνάρτηση σε μια σύνθεση ενώ γνωρίζω την σύνθεση και την εσωτερική ακολουθώ την παρακάτω μεθοδολογία.

Θέτω g(x)= t και λύνω ως προς x τη σχέση αυτή

g(x)= t ⇔ 2x-3= t ⇔ 2x= t+3 ⇔ x= $\frac{t+3}{2}$ **(1)**

τότε αντικαθιστώ την g(x) με το t και όπου υπάρχει x το αντικαθιστώ σύμφωνα με τη σχέση **(1)**.

Έτσι έχω (f∘g)$(x)$= f(g$(x)$)= f(t)=$(\frac{t+3}{2})^2$ -2$\frac{t+3}{2}$ +2=

$= \frac{t^2+6t+9}{4} - \frac{6t+18}{4} + \frac{8}{4} = \frac{t^2-1}{4}$, με αντικατάσταση της ανεξάρτητης μεταβλητής έχω πως f(x)= $\frac{x^2-1}{4}$

(Επαλήθευση, όχι αναγκαστικά: f(g$(x)$)- $\frac{g^2(x)-1}{4} = \frac{(2x-3)^2-1}{4} = \frac{(2x-3-1)(2x-3+1)}{4} =$

$= \frac{(2x-4)(2x-2)}{4} = \frac{4(x-2)(x-1)}{4}$= (x-2)(x-1)= $x^2$-3x+2) άρα είμαστε σωστοί.

**5)** Να βρείτε τον τύπο της g αν (f∘g)$(x)$= $e^x$+xημx και f(x)= x-1

Λύση: Όταν αναζητώ την εσωτερική συνάρτηση ενώ γνωρίζω τη σύνθεση και την εξωτερική τα πράγματα είναι πιο εύκολα. Εξισώνω την f(g$(x)$) με την (f∘g)$(x)$ και λύνω ως προς g(x).

Δηλαδή: αφού f(x)= x-1 ⇔ f(g$(x)$)= g(x)-1 ⇔ g(x)= $e^x$+xημx+1.

**6)** Δίνεται συνάρτηση f: ℜ→ ℜ με (f∘f)$(x)$= 5x-4, ∀ x∈ℜ (1)
Να δείξετε ότι : f(1)= 1

Λύση: $D_{f\circ f}$= {x∈ $D_f$: f(x)∈ $D_f$}= {x∈ℜ: f(x)∈ℜ}= ℜ

Άρα ορίζεται και η f∘f∘f, αφού $D_{f\circ f\circ f}$= {x∈$D_f$: f(x)∈$D_{f\circ f}$}=

= {x∈ℜ: (f∘f)$(x)$∈ℜ}= ℜ με (f∘f∘f)$(x)$ = f∘f(f$(x)$)= 5f(x)-4 **(1)**

η **(1)** για x=1 γίνεται (f∘f)$(1)$= 5f(1) - 4 ⇔ f(f∘f)$(1)$)= 5f(1) - 4

⇔ f(1)= 5f(1) - 4 ⇔ 4f(1)= 4 ⇔ f(1)= 1

**7)** Έστω f,g: ℜ→ℜ με (f∘g)$(x)$= $x^2$-7x+16, x∈ℜ
και (g∘f)(4)= 4.
➢ Ν.δ.ο οι $C_f$ και $C_g$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο

Λύση: $D_{f\circ g}$= {x∈$D_g$: g(x)∈$D_f$}= {x∈ℜ: g(x)∈ℜ}= ℜ
Άρα ορίζεται και η (f∘g∘f) αφού $D_{f\circ g\circ f}$= {x∈$D_f$: f(x)∈ $D_{f\circ g}$}= {x∈ℜ: f(x)∈ℜ}= ℜ

με (f∘g∘f)$(x)$= (f∘g)(f$(x)$)= $f^2(x)$-7f(x)+16, x∈ℜ για x=4 έχω (f∘g)$(f(4))$= f∘(g∘f)$(4)$= f(g∘f)$(4)$ ⇔

f(4)= $f^2(4)$-7f(4)+16 ⇔ $f^2(4)$-8f(4(+16= 0 ⇔ $(f(4) - 4)^2$= 0 ⇔ f(4)= 4

## <u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ</u>

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.1)** Να ορίσετε, εφόσον είναι εφικτό τις f∘g και g∘f όταν

i) f(x)= $\sqrt{1 - x}$ και g(x)= ln(x-1), ii) f(x)= $\sqrt{3 - 4x^2}$ και g(x)= συνx.

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.2)** Αν f(x)= $\frac{x-3}{x}$, να ορίσετε την f∘f.

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.3)**Δίνονται συναρτήσεις f(x)= $\frac{1}{2x-5}$ και g(x)= 4x+3

Να ορίσετε τις i) f∘g, ii) g∘f, iii) f∘f, iv) g∘g

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.4)**Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)= $\frac{1+x}{x}$, g(x)= $\frac{1}{x^2}$

και h(x)= $\sqrt{x + 1}$. Να αποδείξετε ότι (f∘g∘h)=x, ∀$x > 1$

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.5)** Να εκφράσετε ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων την f όταν:

i) f(x)= ημ$x^2$, ii) f(x)= $e^{\sqrt{x^2+1}}$, iii) ημ[ln($x^2 + 1$)]

iv) $\sqrt{e^{2x} + 1}$, v) f(x)= $x^x$, x>0, vi) f(x) συνg(x)- $e^{g(x)} + g^5(x)$

όπου g: ℜ→ℜ

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.6)** Να βρείτε τον τύπο της f για την οποία ισχύει:

i) (f∘g)$(x)$= $x^2 - 2x + 3$ και g(x)= x-1

ii) (f∘g)$(x)$= 2$x^2$-5x+1 και g(x)= x+4

iii) (f∘g)$(x)$= 3$e^{2x}$+x+1 και g(x)= $e^x$+2

iv) (f∘g)$(x)$= $x^2$+$\frac{1}{x^2}$-5 και g(x)= x+$\frac{1}{x}$, x≠0

v) (f∘g)$(x)$= $\frac{x}{x+2}$, και g(x)= $\sqrt{x + 1}$, x≥−1

vi) (f∘g)$(x)$= $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}$ και g(x)= $x^2 + 1$

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.7)** Να βρείτε τον τύπο της g για την οποία ισχύει:

i) $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 6x - 2$ και $f(x) = 2x - 4$
ii) $(f \circ g)(x) = x + 3$ και $f(x) = \ln(x-1)$, $x > 1$
iii) $(f \circ g)(x) = 2x + 1$ και $f(x) = e^x$

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.8)** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(2x-1) = 4x^2 - 10x + 14$ $\forall x \in \Re$, τότε να βρείτε τον τύπο της f.

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.9)** Δίνεται συνάρτηση $f:[-2,1] \to \Re$
Να βρείτε το πεδίο ορισμού των:
i) $g(x) = f(2x-3)$, ii) $h(x) = f(x^2)$ , iii) $\varphi(x) = f(\ln(x))$

**<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>.10)** Δίνεται συνάρτηση $f:\Re \to \Re^*$ για την οποία ισχύει $(f \circ f \circ f)(x) = x^2 - 3x$, $\forall x \in \Re^*$. Να δείξετε ότι $A(4,4) \in C_f$

*Οι εφαρμογές 6 και 7 όπως και η άσκηση 10 ανήκουν στο είδος των συναρτησιακών σχέσεων, μία ιδιαίτερα δύσκολη και έξυπνη κατηγορία ασκήσεων, στην οποία θα υπάρξει ξεχωριστό αρχείο με αρκετές λυμένες ασκήσεις πάνω στις συναρτησιακές σχέσεις.

**ΑΓΓΕΛΑΚΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ**